C. Mouilleron – christophe.mouilleron@ensiie.fr
J. Serra – jserra@unistra.fr

TD 7 : Séries entières

Exercice 1 - Calcul de sommes

Pour chacune des séries entières suivantes, indiquer le rayon de convergence, puis calculer la valeur de la somme.

1.1 $S_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$

1.2 $S_2(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$

1.3 $S_3(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3x^n}{n(n+3)}$ décomposer $\dfrac{3}{n(n+3)}$ en éléments simples

1.4 $S_4(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n!}x^n$ décomposer n^3+1 en $\alpha n(n-1)(n-2) + \beta n(n-1) + \gamma n + \delta$

Exercice 2 - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante : $4x\,y'' + 2y' - y = 0$ et $y(0) = 1$.

2.1 On suppose que $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Trouver une relation entre a_n et a_{n+1}.

2.2 Combien vaut a_0 ? En déduire la valeur de a_n en fonction de n uniquement.

2.3 Vérifier que la solution y obtenue précédemment correspond à $\mathrm{ch}(\sqrt{x})$ quand $x \geq 0$.

2.4 On pose $f(t) = y(-t)$. Combien vaut $f(t^2)$? En déduire la valeur de $y(x)$ quand $x \leq 0$.

Exercice 3 - Application à la combinatoire

Un arbre binaire est un arbre où chaque noeud interne a exactement deux fils. On cherche ici à déterminer le nombre a_n d'arbres binaires avec exactement n feuilles.

3.1 Déterminer a_n pour $1 \leq n \leq 5$.

3.2 Expliquer pourquoi on a $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ si $n \geq 2$.

3.3 On appelle série génératrice de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la quantité $A(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Montrer que $A(x)^2 = A(x) - x$.

3.4 En déduire la valeur de $A(x)$ en fonction de x.
note : La quantité $A(x)$ est solution d'une équation de degré 2, et $A(0) = 0$.

3.5 Calculer le développement en série entière en 0 de la fonction trouvée à la question précédente. En déduire la valeur de a_n.

Exercice 4 - Un développement en série entière

On considère la fonction définie par $f(x) = \arcsin^2 x$. Le but est de trouver un développement en série entière de f en 0.

4.1 Expliquer pourquoi f admet un développement en série entière en 0 de rayon de convergence au moins égal à 1.

4.2 Calculer f' et f''. En déduire une expression de $(1 - x^2)f''(x)$ en fonction de x et $f'(x)$.

4.3 On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Trouver une relation entre les a_n à l'aide de ce qui précède.

4.4 En déduire le développement en série entière de f en 0.

4.5 Montrer que le rayon de convergence vaut 1.